<< SEPEHR >>
Hormozgan University Physics Institute Magazine

بررسی میرایی آونگ با دامنه زیاد

نسیم قشقایی زاده – الهام نصیری مقدم

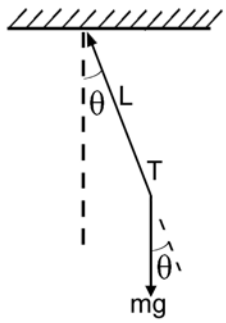
حتماً همگی شما با رابطه دوره تناوب آونگ با دامنه کوچک آشنایی دارید:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

که L طول آونگ و g شتاب گرانش است . در این مقاله قصد داریم اثر دو عامل اختلالی را روی دوره ی تناوب بررسی کنیم . اول دامنه ی بزرگ و دوم میرایی با یک سیال نظیر هوا. اختلال اصطلاحاًبه روشی در حل مسائل فیزیک اطلاق می شود که هنگامی که یک مسئله فیزیکی قابل حل نیست، فرض می کنند عامل غیر قابل حل نمودن مساله مثل مقاومت هوا یا غیره اصلاً وجود ندارد و مسئله را به راحتی حل می نمایند پس تا مرتبه اول تأثیر عامل اختلالی را در نظر می گیرند . مسائل اختلالی نقش مهمی در قابل حل نمودن مسائل فیزیکی ایفا می کنند ، در این مقاله به بررسی دو روش اختلالی نسبتاً متفاوت خواهیم پرداخت .

الف) حل مسأله آونگ ساده دامنه کوچک بدون میرایی

اگر تا کنون با حل این مسأله مواجه نشده اید یا احتمالاً حل آن را فراموش کرده اید با استفاده از روش گشتاور در چند خط کوتاه مسأله حل شده است :



(شکل ۱)

داریم $\tau = I\alpha$ که τ گشتاور ، I لختی دورانی و α شتاب زاویه ای آونگ است . θ را زاویه خط قائم می گیریم .
نیروهای وارد بر جسم که آن را نقطه ای فرض می کنیم عبارتند از mg نیروی وزن در راستای قائم و T کشش طناب در راستای شعاعی . گشتاور در حالت کلی از رابطه

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

محاسبه می شود که r فاصله از مبدأ و F نیروی وارد بر جسم است . حال اگر گشتاور را نسبت به نقطه ثابت o مرکـز آویـز آونـگ محاسبه کنیم از آنجا که نیروی کشش T در راسـتای $\vec{r}$ اسـت $\vec{r}\times\vec{T}=0$ پس کشش طنـاب هیـچ گشـتاوری تولیـد نمی کند از این رو گشتاور فقط ناشی از نیروی وزن است . این گشتاور برابر است با

$$\tau = -mgl\sin\theta$$

علامت منفی به این دلیل است که گشتاور در راستای کاهش θ است I هم بالطبع برابر ml^2 است و θ هم همان α مـی باشـد ، با این تفصیل داریم :

$$-mgl\sin\theta = \mathrm{ml}^2\theta \Rightarrow g\sin\theta + l\theta$$

حالا اگر θ یا دامنه کوچک باشد داریم :

$$g\theta + l\theta = 0 \qquad \text{و} \qquad \sin\theta \approx \theta$$

با جایگذاری $\theta = \theta_0 \sin\omega_0 t$ که $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$.

دوره تناوب برابر $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ هست از این رو : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

ب) اثر بزرگ کردن دامنه روی تناوب آونگ

در مسائل دبیرستانی معمولاً $\theta \approx \sin\theta$ را بـه ازای $\theta \le 6$ درسـت مـی داننـد . حـال بـا اسـتفاده از تکنیـک تغیـیر فرکانس رابطه ی دوره تناوب با دامنه را می سنجیم . کماکان داریم:

$$g\sin\theta + l\ddot{\theta} = 0$$

در ضمن

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} \qquad \text{و} \qquad g\theta + l\ddot{\theta} = \frac{g\theta^3}{6}$$

با جایگذاری

$$\theta = \theta_0 \sin\omega t$$

$$g\theta_0 \sin\omega t - l\omega^2\theta_0 \sin\omega t = \frac{g\theta_0^3}{6}\sin^3\omega t$$

حال از رابطه زیر استفاده می نماییم:

$$\sin^3\theta = \tfrac{3}{4}\sin\theta - \tfrac{1}{4}\sin 3\theta$$

$$g\theta_0 \sin\omega t - l\omega^2\theta_0 \sin\omega t = \frac{g\theta^3{}_0}{6}\sin\omega t = \frac{g\theta_0^3}{6}\sin^3\omega t$$

با برابر قرار دادن ضرایب $\sin\omega t$ بدست می آوریم:

$$g - l\omega^2 = \frac{g\theta_0^2}{8} \qquad \omega^2 = \frac{g}{6}(1-\frac{\theta_0^2}{8}) \qquad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}(1-\frac{\theta_0^2}{8})^{\frac{1}{2}}$$

از رابطه $(1-x)^n = 1-nx$
استفاده می کنیم وداریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}(1-\frac{\theta_0^2}{16})$$

بنابراین

$$T = T_0(1+\frac{\theta_0^2}{16})$$

که دوره تناوب دامنه خیلی کوچک است . به عبارت دیگر با افزایش دامنه دوره تناوب نیز زیاد می شود .

حالا یک پرسش هوشمندانه : معنی فیزیکی جمله $\sin 3\omega t$ چیست ؟

جواب : این جمله به معنی این است که آونگ یک مد سازی دیگر با فرکانس 3ω نیز دارد .

ج)بررسی اثر میرایی هوا

اگر تاثیر میرایی هوا را نیز در نظر بگیریم معادله حرکت آونگ به صورت زیر در خواهد آمد (دلیل آن بسیار ساده است نیروی مقاوم $F = \gamma ml\dot\theta$ در جهت مماس و در خلاف جهت سرعت به جرم وارد می شود .)

$$mgl\sin\theta + ml^2\ddot\theta + \gamma ml^2\dot\theta = 0$$

اگر دامنه را خیلی کوچک بگیریم داریم:

$$g\theta + l\ddot\theta + \gamma l\dot\theta = 0$$

حل این معادله دیفرانسیل با استفاده از اعداد مختلط رابطه اویلر بسیار ساده است . می توانید با جایگذاری جواب

$$\theta = \theta_0 e^{-at}\cos(\omega t + \phi)$$

که در آن $a = \frac{\gamma}{2}$ و $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\gamma^2}{4}}$ و $\phi = 0$

و تحقیق کرد که جواب به شکل یک نوسان سینوسی است که دامنه آن به طور نمایی با زمان افت می کند از آنجا که انرژی یک نوسان شبه هماهنگ با مجذور دامنه آن نسبت دارد می توان گفت که انرژی نیز به طور نمایی با نمای $e^{-\gamma t}$ کم می شود .

با توجه به محاسبات بالا می توان گفت که اگر شخصی بخواهد ضریب میرایی را اندازه بگیرد به احتمال زیاد معقول ترین راه آن است که دامنه نوسان آونگ را بر حسب زمان بسنجد و با مقایسه با رابطه ی $e^{\frac{-\gamma t}{2}}$ را بدست آورد . اما پرسش اساسی آن است که در حالتی که دامنه بزرگ است (به حدی که سیستم غیر خطی است) آیا این روش همچنان معتبر است و اگر نیست خطای آن از چه مرتبه ای است ؟

اگر به جای نگاه دینامیکی {نیرو و گشتاور} از منظر انرژی مسئله را حل کنیم جواب پرسش های قبل چندان هم پیچیده نیست . از آنجا که ضریب میرایی خیلی بزرگ نیست می توان به این نتیجه رسید که ΔE انرژی تلف شده در یک دوره تناوب بـا E متناسـب است و رابطه زیر را دارد:

$$\frac{\Delta E}{T} = -\gamma E$$

چون طبق تعریف $\Delta E = \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle T$ که $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle$ توان تلف شده متوسط در دوره تناوب است می توان نوشت :

$$\gamma = \frac{-\left\langle \frac{dE}{dT} \right\rangle}{E}$$

دقت کنیم که تعریف اصلی γ عبارت دیگری بود. $\gamma = \frac{Fv}{m_v}$ یعنی γ نسبت نیروی مقاوم هوا به m_v بود .

با این تعریف γ فقط به خواص سیال مقاوم بستگی دارد و از دامنه مستقل است اما γ ی ظاهری که با رابطه ی

$$\gamma = \frac{-\left\langle \frac{dE}{dT} \right\rangle}{E}$$

تعریف می شود فقط تحت شرایط دامنه ی کوچک با γ واقعی برابر است و در غیر اینصــورت رابطـه دیگـری خواهـد داشـت کـه بدست خواهیم آورد .

داریم :

$$\frac{dE}{dT} = F_v . V$$

یعنی توان تلف شده برابر حاصلضرب داخلی سرعت در نیروی اتلاف کننده یا ناپایستار است پس :

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma_m l^2 \theta^2$$

چون در عبارت $\frac{dE}{dT}$ لحظه ای ضریب γ که طبق فرض خیلی کوچک است ظـاهر شـده بقیـه عبـارت را مـی تـوان تـا مرتبـه صفـر محاسبه کرد . منظور از مرتبه صفر سبت به γ=0 آن است که فرض کنیم γ یا اینکه میرایی هوا وجـود نـدارد بـا ایـن فـرض { دامنـه بزرگ میرایی صفر } همانگونه که قبلاً حل کردیم داریم :

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}(1 - \frac{\theta_0^2}{16})}$$

پس

$$\left\langle \frac{dE}{dT} \right\rangle = -\gamma m l^2 \theta_0^2 \omega^2 \left\langle \cos^2 \omega t \right\rangle$$

عمل متوسط گیری فقط روی تابع $\cos^2 \omega t$ عمل می کند چـون بقیـه ثـابت هسـتند . متوسـط $\cos^2 \omega t$ و $\sin^2 \omega t$ در یک دوره تناوب 1/2 هستند .

برای اثبات :

$$\left(\cos^2 \theta t\right) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

بنابراین:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\gamma m l^2 \theta_0^2 \frac{g}{2l} (1 - \frac{\theta_0^2}{8})$$

از طرفی در یک دوره تناوب با فرض میرایی صفر داریم:

$$E = \frac{1}{2} ml^2\theta^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

برای پیدا کردن انرژی در یک دوره تناوب توجه کنید که انرژی دو بخش جنبشی و پتانسیل دارد و هنگامی که آونگ به ماکزیمم انحراف خود θ_0 می رسد انرژی جنبشی آن صفر است و

$$E = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

و از آنجا که برای θ کوچک

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}$$

پس

$$E = \frac{mgl\theta_0^2}{2}$$

پس

$$\gamma_{img} = -\frac{\left\langle \frac{dE}{dT} \right\rangle}{E} = \gamma_{rel}\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)$$

به عبارت دیگر با بزرگ شدن دامنه ضریب میرایی ظاهری شروع به کم شدن می کند در حالی که ضریب میرایی واقعی همچنان ثابت است .

نتیجه گیری : تاثیر بزرگ شدن دامنه بر ضریب میرایی ظاهری در همه سیستم های غیر خطی قابل مشاهده است که آونگ با دامنه بزرگ فقط یک نمونه از آنهاست . مثالهای دیگر فنرهای سخت و نرم می باشند . فنرهای نرم ، فنرهایی هستند که کشیدن آنها پس از آنکه کش آمدند نسبت به فنر ایده آل راحت تر می شود و فنرهای سخت ، فنرهایی هستند که بر عکس نیروی لازم برای کشیدن آنها از فنر ایده آل بیشتر است . به عبارت دیگر رابطه ی F=-kx برای فنرهای نرم به صورت $F = -kx + ax^3$ در می آید .

و برای فنرهای سخت به صورت $F = -kx - ax^3$ است .

ضریب میرایی ظاهری نوسان فنر نرم درست مانند آونگ با دامنه ی بزرگ با افزایش دامنه کمتر می شود اما در مورد فنر سخت برعکس ضریب میرایی ظاهری با ازدیاد دامنه افزایش می یابد .

منابع :

۱- دیوید هالیدی،رابرت رزنیک،فیزیک،ترجمه ی نعمت ا... گلستانیان ، محمود بهار

۲- دانیل کلینز،روبرت جی کلنکو،آشنایی با مکانیک ، فصل پنجم