عروسک پایدار

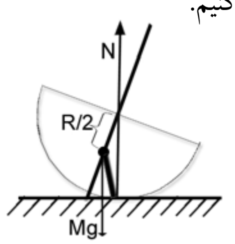

شکل (۱)

اگرعروسک شکل (۱) را رها کنیم ، به حالت قائم باز می‌گردد. چرا؟

شاید شما هم نمونه‌هایی از این نوع اشیاء را ـ برای مثال، خودکارهای دوکی شکل ـ دیده باشید. این گونه وسایل همواره موجب تعجب ما می‌شوند؛ زیرا با تصور اولیه ما برابر نیستند. اگر از ما بپرسند :«اگر جسمی کج شود، خواهد افتاد یا دوباره به حالت اول باز خواهد گشت؟» می گوییم: «می‌افتد.»

در این مقاله، سعی می کنیم به چگونگی استفاده از قوانین فیزیک در ساخت این اشیاء پی ببریم.

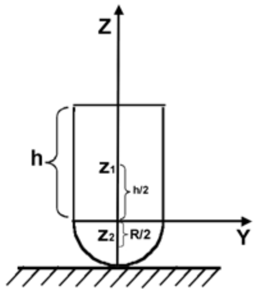
برای جلوگیری از پیچیدگی مسئله، از مدل ساده استوانه چسبیده به نیمکره تو خالی استفاده می کنیم. ابتدا شرایط تعادل نیمکره را مورد بررسی قرار می دهیم. این نیمکره را تو خالی به جرم M، شعاع R و چگالی سطحی یکنواخت فرض می کنیم. با محاسبه ساده‌ای می توان نشان داد که مرکز ثقل نیمکره به فاصله R/2 از مرکز و داخل نیمکره و روی محور تقارن آن قرار دارد. حال نیمکره را روی زمین قرار می دهیم و مطابق شکل (۲) به اندازه درجه از حالت قائم دور می کنیم.



شکل ۲

لازم به ذکر است که برای جلوگیری از حرکت انتقالی، نیروی اصطکاک وجود دارد. نیروی عمودی که از زمین به نیمکره (N) وارد می شود، همیشه بر سطح نیمکره عمود است؛ بنابراین از مرکز آن می گذرد. گشتاور نیروهای وارد بر جسم را نسبت به نقطه تماس نیمکره با زمین حساب می کنیم. با توجه به شکل (۲) می توان فهمید که نیروی عمودی سطح و نیز نیروی اصطکاک، در تعیین گشتاور دخالتی ندارد (گشتاور آنها صفر می‌شود) و باید فقط گشتاور نیروی وزن محاسبه شود. اندازه گشتاور لحظه‌ای نیروی وارد در لحظه رها شدن برابر $r\, mg \sin\theta$ است که موجب بازگشت جسم به حالت اول می‌شود . با این روش می‌توان گشتاور را در هر حالت دیگر نیز نسبت به نقطه تماس نیمکره با زمین محاسبه کرد و نتایج مشابهی به دست آورد.(r و θ متغیر هستند). توجه داشته باشید تا هنگامی که امتداد نیروی وزن از نقطه تماس نیمکره با سطح زمین عبور نکند، جسم به حالت اول باز خواهد گشت.

اکنون استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع h و جرم M را به نیمکره می‌چسبانیم. با توجه به تقارن می توان مشاهده کرد که مرکز ثقل استوانه بر مرکز هندسی آن منطبق است. مطابق شکل (۳) دستگاه مختصات zy را انتخاب می‌کنیم و مرکز ثقل استوانه چسبیده به نیمکره را تعیین می کنیم.

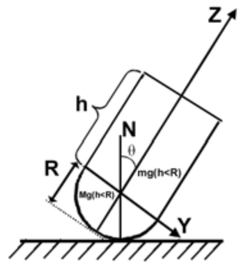


شکل ۳

از آنجا که در نزدیکی سطح زمین مقدار g یکنواخت است، برای اجسام با ابعاد نه چندان بزرگ، مرکز ثقل بر مرکز جرم منطبق خواهد بود. پس می‌توان از روابط مربوط به مرکز جرم برای تعیین مرکز ثقل استفاده کرد. با توجه به اینکه جرم استوانه و نیمکره یکسان است، ارتفاع مرکز جرم دستگاه نسبت به مرکز نیمکره چنین می‌شود:

$$MZ + MZ = 2MZ$$
$$Mh/2 - MR/2 = 2MZ$$
$$Z = (h-R)/4$$

به این ترتیب می‌توان عروسکهایی با شکل‌های مختلف را مثل استوانه‌هایی با ارتفاعهای متفاوت فرض کرد. در این صورت، وقتی جسم به اندازه درجه از حالت قائم کج شود (شکل ٤) ، هنگامی به حالت اولش باز می‌گردد که مرکز جرم دستگاه پایین تر از مرکز نیمکره قرار داشته باشد تا گشتاور نیروی وزن نسبت به نقطه تماس بازگرداننده باشد.

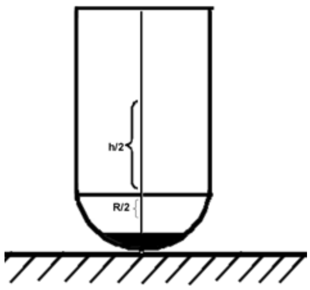


شکل ٤

حالات مختلف تعادل را می‌توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم:

$$\begin{cases} h > R \Rightarrow Z > 0 & \text{«تعادل ناپایدار»} \\ h = R \Rightarrow Z = 0 & \text{«تعادل بی تفاوت»} \\ h < R \Rightarrow Z < 0 & \text{« تعادل پایدار»} \end{cases}$$

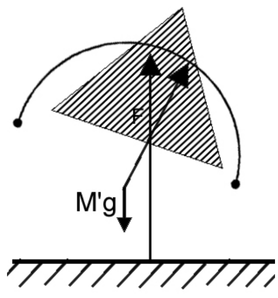
با توجه به نتایجی که از مباحث فوق گرفتیم، می‌توانیم با انتخاب h < R عروسکی بسازیم که بعد از انحراف از حالت قائم به حالت اولیه باز گردد . البته در عمل مشکلات دیگری بروز می‌کند. برای مثال، گاهی برای زیبایی عروسک، مجبور می‌شویم آن را به شکلی بسازیم که موجب افزایش h ـ که نماینده تغییرات در شکل عروسک است ـ بشود. در این صورت، h>R می‌شود و نتیجه مطلوب به دست نمی‌آید. بهترین راه رفع این مشکل، چسباندن یک قطعه فلز سنگین به کف نیمکره است که باید مرکز ثقل آن (مطابق شکل۵) روی محور تقارن نیمکره دو استوانه باشد.



شکل ۵

اگر جرم قطعه فلز در مقایسه با جرم عروسک بسیار زیاد باشد، مرکز ثقل کل دستگاه به طور تقریبی همان مرکز ثقل قطعه فلز می‌شود. در نتیجه با محاسبه ای همانند آنچه که برای نیمکره انجام دادیم ، به راحتی می توان دید که در انحراف های بسیار زیاد نیز جسم به حالت اولیه باز می گردد . در عروسک شکل ۱ ، سازنده ، مخزن آبی در زیر آن قرار داده است که با پر کردن آن ، مرکز جرم آن به اندازه کافی پایین می آید . این بحث را می توان به حالتهایی که کف عروسک به شکل نیمکره نیست ، تعمیم داد ؛ البته در آن صورت ، محاسبات قدری مشکلتر خواهد شد .

خودتان می توانید انواع دیگـری از ایـن وسـائل را کـه دارای حرکات جـالبی هسـتند ، بسـازید . بـرای شـروع ابتدا یک تکه چوب را به صورت مخروط در آوریـد . سپس مطابق شکل ٦ دو دسته به صورت متقـارن در دو طرف آن قرار دهید.



شکل۶ M' جرم دو گلوله و مخروط است

حال اگر این مخروط را در امتداد ارتفاع مخروط روی نقطه نوک تیزی قـرار دهیـد ، مـی ایسـتد و اگـر آن را کج کنید ، دوباره به حالت اول باز می گـردد . امـا آیـا برای مخروط بدون دسته نیز این اتفاق رخ می دهد ؟ (شکل ۷)

هر چند جواب بدیهی است اما بـرای روشـن تـر شـدن مطلب آزمایشی انجام می دهیـم . ابتـدا مخـروط بـدون دسته و وزنه را روی نقطه نوک تیز می گذاریم . اگر با تلاش زیاد بتوانیم مخروط را روی نقطه اتکا نگه داریم ، خواهیم دید که با کمترین لرزشی سـقوط مـی کنـد . پس تعادل آن نا پایدار است .

حال به بررسی حالت اول می پردازیـم . نیروهـای وارد بر مخروط (شکل ٦) عبارتند از :

۱ – نیروی وزن مخروط

۲ – نیروی وزن دو گلوله

۳ – نیرویی که از نقطه اتکا وارد می شود .

به جای بررسی تک تک نیروهای ۱ و ۲ مـی توانیـم بـا استفاده از مفهوم مرکـز ثقـل ، مرکـز ثقلـی بـرای کـل جسم در نظر بگیریم و حرکت آن را بدون اینکه خللی در محاسـبات وارد شـود ، تجزیـه و تحلیـل کنیــم . در شکل ۷ می بینیم ، نیرویی که از طرف نقطـه اتکـا وارد می شود ، باید بـه مـوازات نـیروی وزن باشـد تـا جسـم شتاب انتقالی پیـدا نکنـد . ایـن نـیرو برآینـد دو نـیروی عمودی سطح – که همیشه بر سطح جسم عمـود اسـت (N') – و نیروی F – که ناشی از اصطکـاک یـا فـرو رفتن نقطه اتکـا در جسـم اسـت – مـی باشـد . (توجـه کنید که نتیجه نـیروی F و N' ، در حـالتی کـه تعـادل انتقالی وجود دارد برابر نیروی وزن جسم اســت) . بعـد از بررسی حرکـت انتقالی ، به بررسـی حرکـت دورانـی جسم حول نقطه اتکـا مـی پردازیـم . در ابتـدای بحـث گفتیـم کـه دو گلولـه سـنگین بـه دو دسـته متصـل بـــه مخروط می بندیم ، چون می خواهیم مرکز ثقل جســم را به زیر نقطه اتکا منتقل کنیم (با توجه به شــکل ٦) ، گشتاور نیروی وارد بر آن نسبت به نقطـه اتکـا موجـب بازگشت جسم به حالت اولیه می شود و جسم شروع به نوسان می کند : این نوسان به مرور مستهلک مـی شـود و جسم به حالت قائم در مـی آیـد . اکنـون مـی توانیـم درک کنیم کـه لزومـی نـدارد کـه جسـم را در امتـداد ارتفاع آن روی نقطه اتکا قرار دهیــم . اگـر سـطوح مـا دارای نیروی لازم N باشد ، می توان جسم را از نقـاط دیگر روی نقطه اتکا قرار داد . در این حالتها ، جسم به شکلی می ایستد که مرکز ثقـل آن روی امتـداد خطـی است که از نقطه اتکا بر زمین عمود می شـود . در ایـن حالت نیز اگر جسم را از تعادل خارج کنیم ، حول ایـن وضعیت نوسان خواهد کرد .